GUIA DE TRABAJO No. 01

AREA: **MATEMATICAS** **ASIGNATURA:** **CALCULO** **DOCENTE:** SANDRA MILENA ZANGUÑA RUIZ

ESTANDARES: 1) Comparo y contrasto las propiedades de los números (naturales, enteros, racionales y reales) y las de sus relaciones y operaciones para construir, manejar y utilizar apropiadamente los distintos sistemas numéricos.
2) Uso argumentos geométricos para resolver y formular problemas en contextos matemáticos y en otras ciencias.
3) Analizo las relaciones y propiedades entre las expresiones algebraicas y las gráficas de las funciones polinómicas y racionales y de sus derivadas.
4) Identifico características de localización de objetos geométricos en sistemas de representación cartesiana y otros (polares, cilíndricos y esféricos) y en particular de las curvas y figuras cónicas.
EJES TEMATICOS: PENSAMIENTO NUMÉRICO Y VARIACIONAL - PENSAMIENTO ESPACIAL Y SISTEMAS GEOMÉTRICOS
COMPETENCIA: Identifica la función de las variables dentro del contexto algebraico (como número generalizado, como objeto concreto, como elemento cambiante)
DESEMPEÑOS: 1) Resuelve problemas que involucren el planteamiento y solución de una inecuación utilizando las propiedades de las desigualdades. **2)** Reconoce las características – representación gráfica de las funciones, las clasifica y resuelve operaciones entre ellas.

UNIDAD 1: DESIGUALDADES E INECUACIONES

CONTENIDO

DESIGUALDADES:

Una **desigualdad** entre dos números reales a y b es una expresión de la forma $a < b$, $a > b$, $a \leq b$, $a \geq b$.

En las desigualdades se cumplen las siguientes propiedades:

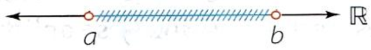
- Si $a < b$ y $b < c$ entonces $a < c$.
- Si se suma o se resta un mismo número en los dos miembros de la desigualdad el sentido de la desigualdad se conserva. Es decir, si $a < b \Rightarrow a \pm c < b \pm c$.
- Si se multiplican o se dividen los dos miembros de la desigualdad por un número positivo el sentido de la desigualdad se conserva. Si $a < b$ y $c > 0 \Rightarrow ac < bc$.
- Si se multiplican o dividen los dos miembros de la desigualdad por un número negativo el sentido de la desigualdad se invierte. Si $a < b$ y $c < 0 \Rightarrow ac > bc$.

Una desigualdad entre números reales se puede representar en un intervalo.

Un **intervalo** es un subconjunto (no vacío) de números reales. Las clases de intervalos se muestran a continuación:

Abierto

$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} / a < x < b\}$



Semiabierto

$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x < b\}$

$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} / a < x \leq b\}$

Cerrado

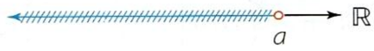
$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x \leq b\}$

Infinito

$(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} / x > a\}$

$[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} / x \geq a\}$

$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} / x < a\}$



$(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} / x \leq a\}$

El intervalo $(-\infty, \infty)$ representa el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ y corresponde a toda la recta real.

Una desigualdad en la que hay una o más incógnitas se denomina **inecuación**. Resolver una inecuación consiste en hallar los valores de la incógnita que hacen verdadera la desigualdad. Al conjunto de dichos valores se le llama **conjunto solución**.

Normalmente, el conjunto solución de una inecuación es un intervalo o unión de intervalos. Así por ejemplo, $x - 5 > -7$ es una inecuación y su solución es el intervalo $(-2, \infty)$, pues si se remplaza x por cualquier valor mayor que -2, la desigualdad es verdadera.

> Una desigualdad en la que intervienen una o más variables se denomina **inecuación**.

Resolver una inecuación consiste en hallar los valores que hacen verdadera la desigualdad. A este conjunto de valores se le llama **conjunto solución**.

Por ejemplo, la desigualdad $x + 5 < 2$ es una inecuación, al realizar operaciones y resolver se obtiene que $x < -3$, esto se puede expresar en forma de conjunto como $S = \{x \in \mathbb{R}/x < -3\}$, en forma de intervalo se escribe $(-\infty, -3)$ y en forma gráfica es:

RECUERDA QUE...

Las propiedades de las desigualdades son:

- Si $a < b, b < c$, entonces, $a < c$
- Si $a < b$, entonces, $a + c < b + c$, $a - c < b - c$
- Si $a < b$ y $c > 0$, entonces, $ac < bc$ y $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$
- Si $a < b$ y $c < 0$, entonces, $ac > bc$ y $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$

Inecuaciones cuadráticas

> Una inecuación de la forma $ax^2 + bx + c > 0$, $ax^2 + bx + c < 0$, $ax^2 + bx + c \geq 0$ o $ax^2 + bx + c \leq 0$, con $x \neq 0$, recibe el nombre de **inecuación cuadrática**.

Por ejemplo, la inecuación $x^2 + 6x + 8 \geqslant 0$ es cuadrática porque el mayor exponente de x es 2.

Para resolver una inecuación cuadrática se aplican las propiedades de las desigualdades hasta obtener una expresión algebraica en un miembro de la inecuación y cero en el otro miembro. Luego, se factoriza la expresión si es posible y se aplican las propiedades de las desigualdades para hallar el conjunto solución.

Cuando la expresión algebraica no se puede factorizar se realizan los siguientes pasos:

- Primero, se expresa la inecuación obtenida como una ecuación.
- Segundo, se halla la solución de la ecuación utilizando la fórmula cuadrática.
- Tercero, se ubican las soluciones en una recta y se toman valores en cada intervalo para comprobar si son solución de la inecuación. Si un valor es solución, el intervalo al que pertenece es solución de la inecuación.

Ejemplos

1 Resolver la inecuación $x^2 - 8 < 2x$.

$$x^2 - 8 < 2x$$

Se aplican propiedades de las desigualdades.

$$x^2 - 2x - 8 < 0$$

Se factoriza.

$$(x - 4)(x + 2) < 0$$

Luego, se determinan dos casos:

- $x - 4 < 0$ y $x + 2 > 0$
  $(-\infty, 4) \cap (-2, \infty) = (-2, 4)$
- $x - 4 > 0$ y $x + 2 < 0$
  $(4, \infty) \cap (-\infty, -2) = \varnothing$
  $(-2, 4) \cup \varnothing = (-2, 4)$

Se aplica la propiedad $a, b < 0$ si $a < 0 \wedge b > 0$.

Luego, la solución de la inecuación $x^2 - 8 < 2x$ es el intervalo $(-2, 4)$.

2 Hallar el conjunto solución de la inecuación $x^2 - x - 3 \geqslant 0$.

Primero, se convierte la inecuación en ecuación de modo que $x^2 - x - 3 = 0$ y se resuelve así:

$$x \approx -1{,}3 \text{ y } x \approx 2{,}3$$

Segundo, las soluciones encontradas dividen la recta en tres intervalos, entonces, se toma un valor en cada intervalo y se determina qué intervalos cumplen la desigualdad. Así, se tiene por ejemplo, que para $x = -2$ y para $x = 3$ la inecuación se cumple. En cambio, para $x = 0$ la inecuación no se cumple. Por tanto, el conjunto solución es:

$$\left(\infty, \frac{1-\sqrt{13}}{2}\right] \cup \left[\frac{1+\sqrt{13}}{2}, \infty\right)$$

Ejemplos

(3) Resolver la inecuación $x^2 - 8 < 2x$ en forma gráfica.

Primero, se resta $2x$ a ambos lados y se factoriza así:

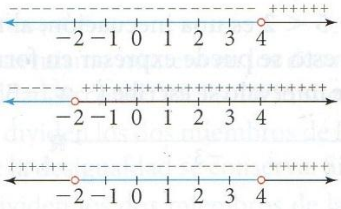
$$(x-4)(x+2) < 0$$

Luego, se hallan las raíces de la expresión factorizada y se ubican en la recta real así:

$x - 4$

$x + 2$

$(x - 4)(x + 2)$



Antes de cada raíz la expresión correspondiente es negativa.

Se multiplican los signos correspondientes a cada factor teniendo en cuenta las raíces.

Como la desigualdad indaga por los valores menores que 0, la solución de la desigualdad es el intervalo cuyo producto es negativo, es decir, $(-2, 4)$.

Actividades

Ejercita: 1-2 Razona: 3-4-5

1 Represente cada número en la recta numérica:

a. $\frac{1}{2}$ e. $-\sqrt{4}$ i. $\frac{3}{2}$

b. 0,125 f. $-\frac{2}{3}$ j. 0,375

c. $-\frac{5}{2}$ g. $-0{,}625$ k. $\sqrt{9}$

d. $-0{,}25$ h. π l. $-\pi$

2 Ubica los siguientes intervalos en la recta real.

a. $(1, 8)$ f. $(-5, -2)$

b. $(-7, -1]$ g. $(0{,}5; 6{,}3]$

c. $[-8, 8)$ h. $[4, \infty)$

d. $(-9, 0]$ i. $(-\infty, 3]$

e. $[-6, -1]$ j. $\left[-\frac{1}{2}, \frac{17}{2}\right]$

3 Escribe en forma de intervalos cada uno de los siguientes conjuntos.

a. $G = \{x/x \in \mathbb{R}, x > -3\}$

b. $H = \{x/x \in \mathbb{R}, -4 < x \leq 3\}$

c. $I = \{x/x \in \mathbb{R}, x \leq -5\}$

d. $J = \{x/x \in \mathbb{R}, x \leq -3 \vee x \geq 3\}$

e. $K = \{x/x \in \mathbb{R}, x > -2 \wedge x < 0\}$

f. $M = \{x/x \in \mathbb{R}, x \geq 8\}$

g. $N = \{x/x \in \mathbb{R}, 0 < x \leq 5\}$

h. $O = \{x/x \in \mathbb{R}, x \geq 0\}$

4 Determina el conjunto solución de las siguientes inecuaciones.

a. $x + 20 < 10$ i. $x - 8 > -3$

b. $4x \leq 3$ j. $-2x \geq -1$

c. $\frac{x}{3} + 1 < 0$ k. $\frac{x}{-2} - 5 > -7$

d. $4x + 3 \leq 7$ l. $-3x - 1 \geq -5$

e. $\frac{x}{3} + 1 \leq 4$ m. $\frac{x}{2} \leq 1$

f. $\frac{x}{-3} \geq -5$ n. $\frac{x}{-2} - 5 \leq -10$

g. $\frac{2}{3}x > 5$ o. $-\frac{2}{5}x + 1 < 4$

h. $\frac{4x+1}{3} < 7$ p. $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} > 5$

5 Determina el conjunto solución de las siguientes inecuaciones cuadráticas.

a. $x(3x + 5) > 0$

b. $4x(x - 3) < -9$

c. $x^2 + 8x \geq -7$

d. $x^2 \leq 1$

e. $121 - 22x + x^2 > 0$

f. $x^2 - 7x + 12 < 0$

g. $4x^2 - 10x + 6 \geq 0$

h. $9x^2 - 4 \leq 0$

i. $2x^2 + 7x \leq 3$

El **valor absoluto** de un número real a, es la distancia que existe entre a y cero en la recta numérica. Se simboliza $|a|$, es un número no negativo y cumple que:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

La expresión $|x + 4| = 7$ es una ecuación con valor absoluto y para resolverla se deben tener en cuenta las siguientes propiedades:

1. $|x| = a \Leftrightarrow a \geq 0, \wedge, x = a \vee x = -a$
2. $|x| = |a| \Leftrightarrow x = a, \vee, x = -a$

Otras propiedades del valor absoluto son:

3. $|-a| = |a|$
4. $|ab| = |a|\,|b|$
5. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|} b \neq 0$
6. $|a + b| \leq |a| + |b|$
7. $|a| = \sqrt{a^2}$

Ejemplos

Resolver las siguientes ecuaciones utilizando las propiedades del valor absoluto.

a. $|2x + 3| = 8$

$|2x + 3| = 8$ *Ecuación dada.*

$2x + 3 = 8 \vee 2x + 3 = -8$ *Se aplica la propiedad 1.*

$x = \frac{5}{2} \vee x = -\frac{11}{2}$ *Se resuelve cada ecuación.*

Luego, el conjunto solución es $\left\{-\frac{11}{2}, \frac{5}{2}\right\}$.

b. $|x - 7| = -5$

La ecuación dada no tiene solución pues $-5 < 0$, lo que contradice la definición de $|a|$.

c. $|x - 9| = |2x - 3|$

$|x - 9| = |2x - 3|$ *Ecuación dada.*

$x - 9 = 2x - 3 \vee x - 9 = -(2x - 3)$ *Se aplica la propiedad 2.*

$x = -6 \vee x = 4$

El conjunto solución de la ecuación es $\{-6, 4\}$.

d. $|x + 7| = 2x + 6$

Como el valor absoluto siempre es un valor positivo, o cero, entonces $2x + 6 \geqslant 0$, la inecuación se cumple si se presentan dos condiciones.

- $2x + 6 > 0$ y $x + 7 = 2x + 6$ o
- $x + 7 = -(2x + 6)$

Entonces, se resuelven las ecuaciones y la inecuación así:

$2x + 6 \geq 0$ y $x + 7 = 2x + 6$

$2x \geq -6$ $\quad x - 2x = 6 - 7$

$x \geq -3$ $\quad -x = -1$

$x = 1$

$x + 7 = -2x - 6$

$x + 2x = -6 - 7$

$3x = -13$

$x = -\frac{13}{3}$

Luego, el conjunto solución resulta de operar:

$$\{x \in \mathbb{R} / x \geq -3\} \cap \left\{1, -\frac{13}{3}\right\} =$$

Entonces, la solución a la ecuación es $\{1\}$.

INECUACIONES DE VALOR ABSOLUTO

Una inecuación de la forma $|2x + 1| \leq 8$ recibe el nombre de **inecuación con valor absoluto**. Para solucionar estas inecuaciones se deben tener en cuenta las siguientes propiedades:

1. $|x| > a \Leftrightarrow x > a \vee x < -a$
2. $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$ con $a \geq 0$

Ejemplos

Hallar los valores de x que satisfacen las siguientes inecuaciones.

a. $|2x - 6| \leq 12$

$|2x - 6| \leq 12$ *Inecuación dada.*

Como $12 \geq 0$, $-12 \leq 2x - 6 \leq 12$ *Se aplica la propiedad 2.*

$2x - 6 \geq -12$ y $2x - 6 \leq 12$ *Se separa la anterior desigualdad en dos desigualdades.*

$x \geq -3$ y $x \leq 9$ *Se soluciona cada igualdad.*

Luego, $[-3, 9]$ es la respuesta que se encuentra al interceptar los conjuntos anteriores.

b. $|2x + 7| \geq 11$

$|2x + 7| \geq 11$ *Inecuación dada.*

$2x + 7 \geq 11$ o $2x + 7 \leq -11$ *Se aplica la propiedad 1.*

$2x \geq 4$ o $2x \geq -18$ *Se hace transposición de términos.*

$x \geq 2$ o $x \leq -9$ *Se despeja la incógnita en cada desigualdad.*

Luego, la respuesta de la inecuación dada es $[2, +\infty) \cup (-\infty, 9]$.

c. $|3x + 1| \leqslant 2x + 3$

Primero, se aplica la propiedad 2, así:

$-(2x + 3) \leq 3x + 1 \leq 2x + 3$ con $2x + 3 \geqslant 0$ *Se resuelven el paréntesis y la segunda desigualdad.*

$-2x - 3 \leq 3x + 1 \leq 2x + 3$ $\quad x \geq -\dfrac{3}{2}$

Luego, se analiza la expresión $-2x - 3 \leq 3x + 1 \leq 2x + 3$.

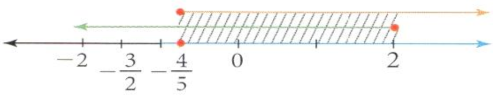
$-2x - 3 \leq 3x + 1$ $\quad$ $3x + 1 \leq 2x + 3$ *Se separa la inecuación en dos inecuaciones y se resuelven.*

$x \geq -\dfrac{4}{5}$ $\quad$ $x \leq 2$

Entonces, se toma la intersección de las soluciones $x \geq -\dfrac{4}{5}$, $x \leq 2$ y $x \geq -\dfrac{3}{2}$, así:

$$\left[-\frac{4}{5}, \infty\right) \cap (-\infty, 2] \cap \left[-\frac{3}{2}, \infty\right) = \left[-\frac{4}{5}, 2\right]$$

Se puede hacer la gráfica así:



DOMINIO Y RANGO DE LAS FUNCIONES:

Dominio y rango de funciones polinómicas

Una función f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, de la forma $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, de donde $a_k \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$ y $n \in \mathbb{N}$, recibe el nombre de **función polinómica**.

Una función polinómica está definida para todo número real, por tanto, su dominio es $\mathbb{R}$. Su rango es un subconjunto de $\mathbb{R}$, que normalmente corresponde a un intervalo.

Ejemplos

Determinar el dominio y el rango de las siguientes funciones polinómicas:

a. $f(x) = \dfrac{3x + 2}{5}$

Esta función polinómica es de grado uno. En particular es una función afín. Por tanto, Dom $f = \mathbb{R}$.

Al despejar x, se obtiene:

$$x = \frac{5y - 2}{3}$$

que corresponde a un polinomio de grado uno en la variable y, así: Ran $f = \mathbb{R}$.

b. $g(x) = x^3 + 2x^2$

Esta es una función cúbica o polinomio de grado tres, y al no poseer restricciones en la variable x, se tiene que:

$$\text{Dom } g = \mathbb{R}$$

En este caso, despejar explícitamente x, en términos de y no es posible, así que resulta conveniente trazar la gráfica de la función para determinar su rango (figura 1).

Al analizar la gráfica de la función $y = x^3 + 2x^2$ se concluye que Ran $g = \mathbb{R}$.

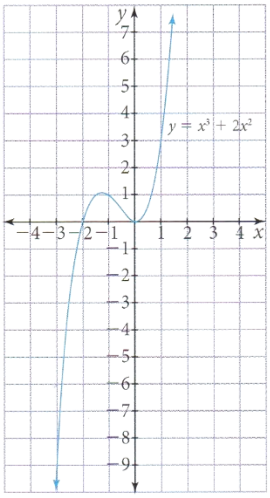


Figura 1

c. **Hallar el dominio y el rango de la función cuadrática $h(x) = x^2 + 5x + 6$. Luego, trazar la gráfica.**

Como $h(x)$ es una función cuadrática, su representación en el plano es una parábola. Luego, Dom $h = \mathbb{R}$, ya que x puede tomar cualquier valor en $\mathbb{R}$.

El rango de la función se puede hallar en forma algebraica así:

$h(x) = x^2 + 5x + 6$

$y = x^2 + 5x + 6$ *Ya que $h(x) = y$.*

$y = x^2 + 5x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 6 - \left(\frac{5}{2}\right)^2$ *Se completa el cuadrado.*

$y = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$ *Se factoriza.*

$\left(x + \frac{2}{5}\right)^2 = y + \frac{1}{4}$

$x + \frac{2}{5} = \pm\sqrt{y + \frac{1}{4}}$

$x = -\frac{2}{5} \pm \sqrt{y + \frac{1}{4}}$ *Se despeja x.*

Como $y + \frac{1}{4} \geq 0$ si $y \geq -\frac{1}{4}$, entonces, Ran $h = \left[-\frac{1}{4}, \infty\right)$. *Se analiza la cantidad subradical.*

DOMINIO Y RANGO DE FUNCIONES CON ALGUNA RESTRICCIÓN

Existen ciertas restricciones que se deben hacer tanto en el dominio como en el rango de una función, para que ella quede bien definida. Estas restricciones dependen del lugar que ocupe la variable dentro de la ecuación dada. Las siguientes son algunas consideraciones que se deben tener presentes en el momento de restringir el dominio de una función.

- El denominador de las expresiones racionales no puede ser igual a cero.
- Las expresiones con radicales cuyo índice es par no pueden contener cantidades subradicales negativas.
- Los logaritmos solo están definidos para cantidades positivas.

Ejemplos

1 Hallar el dominio y el rango de las siguientes funciones.

a. $f(x) = \sqrt{2x-1}$

Como las cantidades subradicales de raíces con índice par deben ser positivas o cero se tiene que:

$2x - 1 \geqslant 0$ *Se plantea la inecuación.*

$x \geq \frac{1}{2}$ *Se despeja la variable.*

$\text{Dom } f = \left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$ *Se determinan los valores en los que x no está restringida.*

$x = \frac{y^2+1}{2}$ *Se despeja x en términos de y para determinar las restricciones de la variable y.*

$\text{Ran } f = \mathbb{R}^+$ *Se determinan los valores en los que está definida y.*

b. $h(x) = \frac{2}{x-3}$

Como el denominador de la expresión racional debe ser diferente de cero se tiene que:

$x - 3 \neq 0$ *Se plantea la expresión.*

$x \neq 3$ *Se resuelve la expresión.*

$\text{Dom } h = \mathbb{R} - \{3\}$

$x = \frac{2}{y} + 3$ *Se despeja x para determinar el rango. Así, $y \neq 0$.*

$\text{Ran } h = \mathbb{R} - \{0\}$

c. $i(x) = \text{Log}\,(x-4)$

Como los logaritmos están definidos para valores positivos, se realiza:

$x - 4 > 0$

$x > 4$ *Se plantea y despeja la inecuación.*

$\text{Dom } j = (4, +\infty)$ *Se determinan los valores en los que x no está restringida.*

$x = 10^y + 4$ *Se despeja x para determinar las restricciones de y.*

$\text{Ran } j = \mathbb{R}$ *Se determinan los valores en los que y está definida.*

EJEMPLOS DE DOMINIO YRANGO CON RESTRICCIONES

2 Determinar el dominio y el rango de cada función. Luego, trazar la gráfica.

a. $f(x) = \dfrac{x-1}{x-2}$

Como $x - 2 = 0$ cuando $x = 2$, entonces, la función $f(x)$ no está definida en este valor, por lo tanto, Dom $f = \mathbb{R} - \{2\}$.

La función tiene una asíntota vertical en $x = 2$.

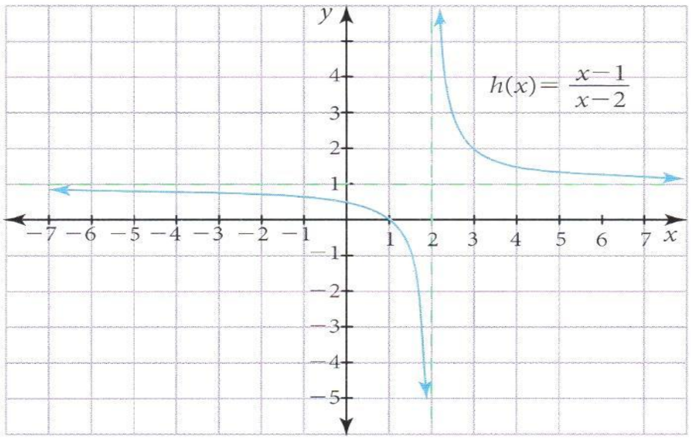
Para hallar el rango se despeja x en $y = \dfrac{x-1}{x-2}$.

Así, $x = \dfrac{2y-1}{y-1}$, como $y - 1 = 0$ cuando $y = 1$.

Entonces, la función $f(x)$ no tiene imágenes en este valor.

Por lo tanto, Ran $f = \mathbb{R} - \{2\}$

La gráfica de $f(x)$ es:

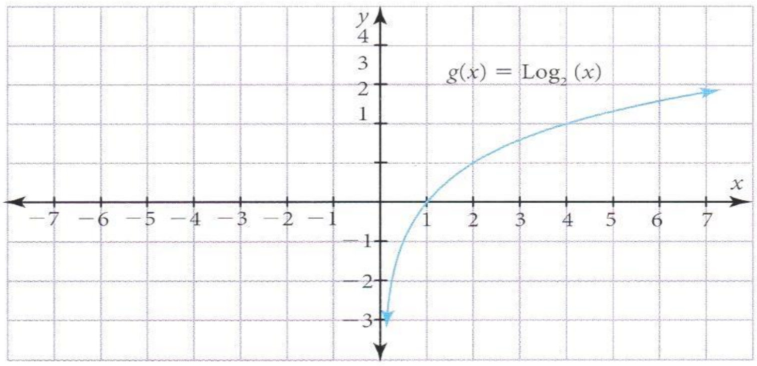


b. $g(x) = \text{Log}_2\, x$

La función $g(x) = \text{Log}_2\, x$ está definida para los valores de x tales que $x > 0$ por tanto Dom $g = (0, \infty)$.

Como $y = \text{Log}_2\, x$, para despejar x se utiliza la función exponencial, así $x = 2^y$, entonces, y puede tomar cualquier valor, así, Ran $g = \mathbb{R}$.

La gráfica de $g(x)$ es:



Dom $g = (0, +\infty)$ y

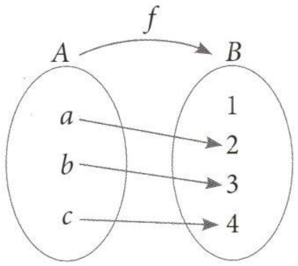
Ran $g = \mathbb{R}$

PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES

Función inyectiva

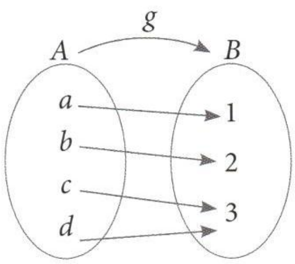
Una función $f: A \to B$ se dice que es **inyectiva** o **uno a uno**, si no existen dos elementos distintos de A con una misma imagen. Es decir, si $x_2, x_1 \in A$ son tales que $x_1 \neq x_2$, entonces, $f(x_1) \neq f(x_2)$.

A continuación, se representan una función inyectiva y una no inyectiva con diagramas de flechas.



f: función inyectiva

En f se observa que elementos diferentes del dominio poseen imágenes diferentes en el codominio.



g: función no inyectiva

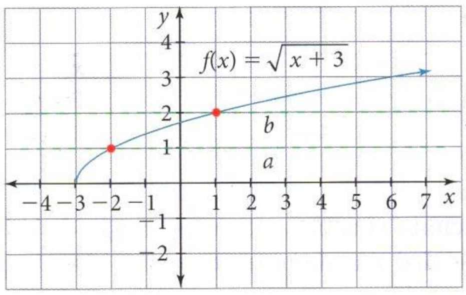
La función g no es inyectiva ya que elementos diferentes del dominio tienen una misma imagen; en este caso c y d, poseen la misma imagen, 3.

Para comprobar si una función f es inyectiva cuando está representada en el plano cartesiano, se trazan rectas paralelas al eje x y estas deben cortar la gráfica de f en un único punto.

Ejemplos

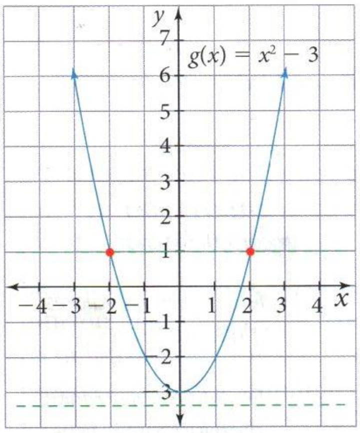
Indicar cuáles de las siguientes gráficas representan funciones inyectivas.

a.



La función $y = \sqrt{x+3}$ corresponde a una función inyectiva puesto que cada recta paralela al eje x que corta la gráfica lo hace en un único punto.

b.



La función $y = x^2 - 3$ no es una función inyectiva, pues el elemento 1 del rango es imagen de -2 y 2.

RECUERDA QUE...

En:

$f(x)$: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

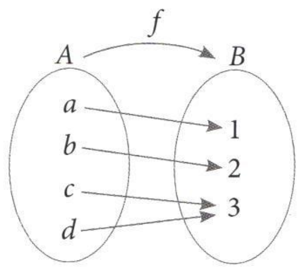
Dominio de f

Codominio de f

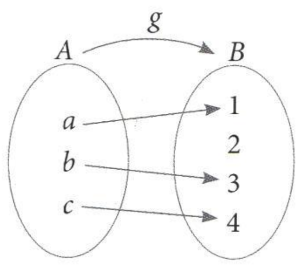
Función sobreyectiva

Una función $f\cdot A \rightarrow B$ se dice que es **sobreyectiva**, si cada elemento del rango es imagen de algún elemento del dominio. Es decir, f es sobreyectiva si Cod f = Ran f.

Los siguientes diagramas de flechas muestran claramente una función sobreyectiva y una que no lo es.



f es una función sobreyectiva, dado que cada elemento del codominio de f es imagen de algún elemento del dominio de f.



g no es una función sobreyectiva, dado que $2 \in$ Cod g, pero no es imagen de ningún elemento de A.

Ejemplos

1 Encontrar el rango de cada una de las siguientes funciones y determinar si son funciones sobreyectivas o no.

a. f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x + 2$.

$f(x) = x + 2$ — *Función dada.*

$x = y \quad 2$ — *Se despeja x para determinar el rango.*

Ran $f = \mathbb{R}$

Así, la función $f(x) = x + 2$ es sobreyectiva ya que Cod f = Ran f.

b. h: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $h(x) = 2^x$

$h(x) = 2^x$ — *Función dada.*

$x = \text{Log}_2\, y$ — *Se despeja x para encontrar el rango.*

$y > 0$ — *Se determinan los valores que puede tomar y.*

Ran $h = (0, +\infty)$ — *Se determina el rango de la función.*

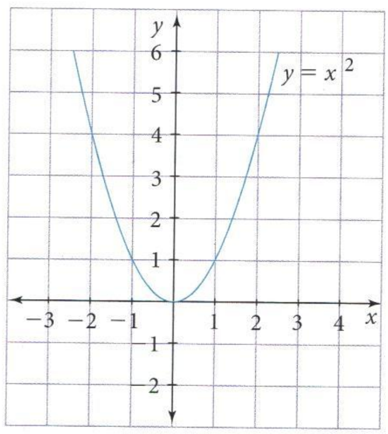
Luego, la función $h(x) = 2^x$ no es sobreyectiva pues Cod $h \neq$ Ran h.

2 Graficar la función

$$f\colon \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$$
$$x \rightarrow x^2$$

Luego, determinar si es o no una función sobreyectiva.

La gráfica de la función es:



La función f es sobreyectiva si el rango de la función es igual al codominio, entonces, si se despeja x en la expresión $y = x^2$ se tiene que $x = \pm\sqrt{y}$

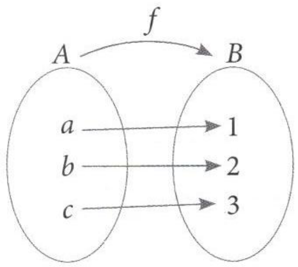
Luego, $y \geqslant 0$, entonces, Ran $f = [0, \infty)$, por tanto, $f(x)$ es sobreyectiva porque el rango es igual al codominio.

FUNCIÓN BIYECTIVA

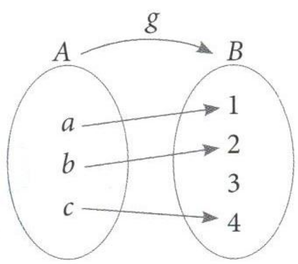
Una función $f: A \to B$ se dice que es **biyectiva**, si y sólo si f es inyectiva y sobreyectiva.

Las funciones biyectivas también se conocen con el nombre de **correspondencias uno a uno**, pues cada elemento del rango debe ser imagen de un único elemento del dominio. Para que esto sea posible, la cantidad de elementos del dominio y el codominio deben ser iguales.

Los siguientes diagramas de flechas muestran una función biyectiva y una que no lo es.



f es inyectiva y sobreyectiva, por tanto, *f* es biyectiva.

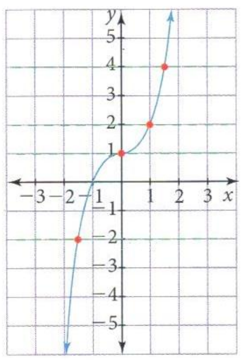


Dado que *g* no es sobreyectiva, entonces, *g* no es una función biyectiva.

Ejemplo

1 Trazar la gráfica de la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^3 + 1$ y determinar si corresponde a una función biyectiva.

La gráfica correspondiente a la función $f(x) = x^3 + 1$ es:

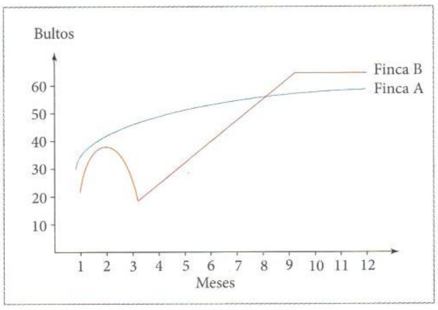


Dado que cada recta paralela al eje x corta la gráfica de f en un único punto, entonces f resulta inyectiva.

Además, $\text{Ran } f = \mathbb{R}$, y $\text{Cod } f = \text{Ran } f$, es decir, f sobreyectiva.

Como f es inyectiva y sobreyectiva, se concluye que f es biyectiva.

2 La siguiente gráfica describe la producción de papa, de una cantidad inicial de bultos hasta su producción final, en dos fincas distintas de una región.



Determinar cuál de las dos gráficas describe una función sobreyectiva y cuál no en el intervalo [1, 12] Justifica la respuesta.

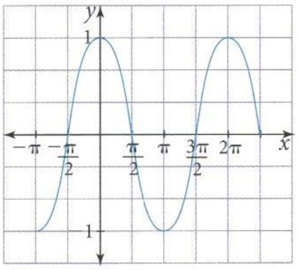
La gráfica de producción de la finca *A* describe una función biyectiva, ya que cumple la prueba de la recta horizontal en el intervalo [1, 12] además, el rango es igual al codominio [30, 60]

La gráfica de producción de la finca *B* no describe una función biyectiva, ya que no cumple la prueba de la recta horizontal, por tanto, no es inyectiva.

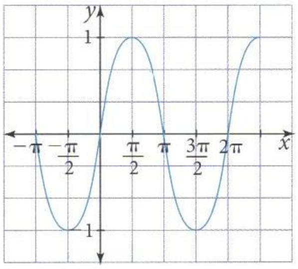
FUNCIONES PARES E IMPARES

- Una función $f: A \to B$ se dice que es **par**, si $\forall\ (x, y) \in f$ se tiene que $(-x, y) \in f$. Es decir, $f(x) = f(\quad x)$.
  Si una función es par su gráfica es simétrica con respecto al eje y.
- Una función $f: A \to B$ se dice que es **impar**, si $\forall\ (x, y) \in f$ se tiene que $(-x, \quad y) \in f$. Es decir, $f(\quad x) = -f(x)$.
  Si una función es impar su gráfica es simétrica con respecto al origen del plano cartesiano. Este hecho se verifica fácilmente reflejando $f(x)$ con respecto al eje y y posteriormente, con respecto al eje x.

Por ejemplo, la función coseno es una función par, pues es simétrica con respecto al eje y y la función seno es impar pues es simétrica con respecto al origen.



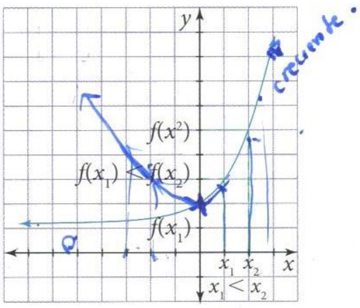
Función par



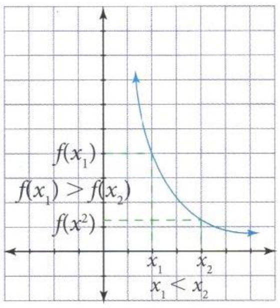
Función impar

Funciones crecientes y decrecientes

- Una función $f: A \to B$ se dice que es **creciente** en un intervalo I, si $\forall\ x_1, x_2 \in I$ con $x_1 < x_2$ implica que $f(x_1) < f(x_2)$.
  La gráfica muestra una función creciente en el intervalo I.
- Una función $f: A \to B$ se dice que es **decreciente** en un intervalo I, si $\forall\ x_1, x_2 \in I$ con $x_1 < x_2$ se tiene que $f(x_1) > f(x_2)$.
  La gráfica muestra una función creciente en el intervalo I.
  Una función que es creciente en todo su rango se denomina **creciente**. Si es decreciente en todo su rango, se denomina **decreciente**.



Función creciente



Función decreciente

Función periódica

- Una función $f: A \to B$ es **periódica**, si $f(x) = f(x + P)$, es decir, si las imágenes se repiten después de que la variable independiente recorre un cierto intervalo regular. La longitud del intervalo P recibe el nombre de **período**.
  La función tangente es periódica y su período es π ya que $\tan x = \tan(x + k\pi)$.

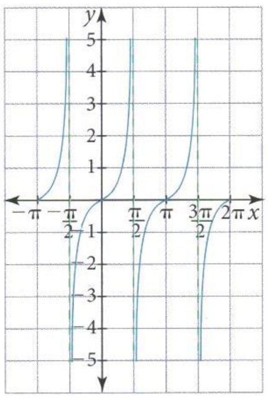


Figura 2. Función periódica

EJEMPLOS DE FUNCIONES PARES E IMPARES

Ejemplos

1 **Indicar cuáles de las siguientes funciones son pares o impares.**

a. $f(x) = x^2 \quad 3$

$f(\quad x) = (-x)^2 \quad 3$ *Se calcula f(−x).*

$= x^2 \quad 3$ *Se simplifica.*

Dado que $f(x) = f(-x)$, entonces, f es par.

b. $f(x) = x^3 + x$

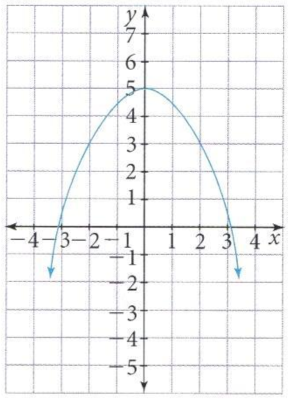
$f(\quad x) = (\quad x)^3 + (\quad x)$ *Se calcula.*

$= \quad x^3 - x$ *Se simplifica.*

$= -(x^3 + x) = \quad f(x)$

Dado que $f(-x) = \quad f(x)$, entonces, f es impar.

2 **Indicar el intervalo donde la gráfica es creciente y donde es decreciente.**



Creciente en $(-\infty, 0]$
Decreciente en $[0, +\infty)$.

CLASIFICACIÓN DE LAS FUNCIONES

Las funciones reales se clasifican en: funciones polinómicas, funciones racionales, funciones radicales, funciones trascendentes y funciones especiales.

Funciones polinómicas

Una **función polinómica** es aquella que tiene la forma

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \quad + a_1 x + a_0$$

con $a_n \neq 0$, $n \in \mathbb{Z}^+$ y $a \in \mathbb{R}\ \forall_{\,i} = 0, 1, 2, 3, \quad n.$

El dominio de una función polinómica es el conjunto $\mathbb{R}$ y el rango es $\mathbb{R}$ o un intervalo de $\mathbb{R}$.

Algunas funciones polinómicas son la función constante, la función afín y la función cuadrática.

Función constante

Toda función de la forma $f(x) = k$, donde $k \in \mathbb{R}$, recibe el nombre de **función constante**.

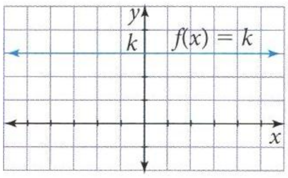


Figura 3

La gráfica de una función constante es una recta paralela al eje x (figura 3).

Si f es una función constante, se tiene que: Dom $f = \mathbb{R}$ y Ran $f = \{k\}$

Por ejemplo, la función $f(x) = \frac{1}{4}$ es una función constante, además, Dom $f = \mathbb{R}$ y

Ran $f = \left\{\frac{1}{4}\right\}$

Función afín

Toda función de la forma $f(x) = mx + b$, donde $m, b \in \mathbb{R}$ y $m \neq 0$, recibe el nombre de **función afín**.

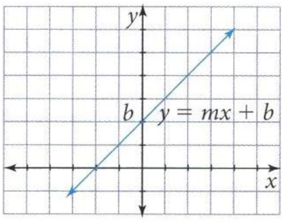


Figura 4

La gráfica de una función afín corresponde a una línea recta.

El valor m es la pendiente de la recta (si $m > 0$ la función es creciente y si $m < 0$ la función es decreciente). El valor b es el punto de intersección de la recta con el eje y. Si f es una función afín, entonces, Dom $f = \mathbb{R}$ y Ran $f = \mathbb{R}$ (figura 4).

Cuando en la función anterior $b = 0$, la función recibe el nombre de **función lineal**. Su gráfica es una recta que pasa por el origen del plano cartesiano. En símbolos una función lineal es una función de la forma $f(x) = mx$ con $m \neq 0$.

Por ejemplo, la función $f(x) = 2x + 1$ es una función afín, su dominio Dom $f = \mathbb{R}$ y Ran $f = \mathbb{R}$, por otro lado, $g(x) = \quad 8x$ es una función lineal con Dom $g = \mathbb{R}$ y Ran $g = \mathbb{R}$.

RECUERDA QUE…

En la función
$f(x) = ax^2 + bx + c$
- Si $b = 0$, $c = 0$, la parábola tiene vértice en el origen.
- Si $b = 0$ y $c \neq 0$, el vértice de la parábola es $(0, c)$.
- Si $b \neq 0$ y $c \neq 0$ la parábola tiene vértice (h, c) ya que se tiene
$f(x) = a(x \quad h)^2 + k$.

Una función de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, donde $a, b, c \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$, recibe el nombre de **función cuadrática**.

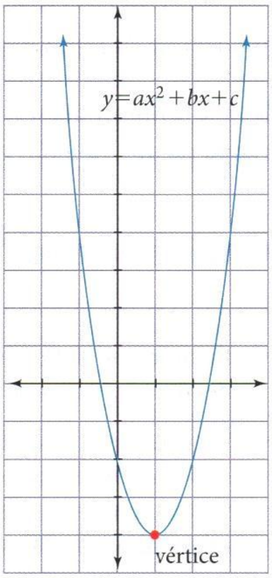
Una función cuadrática se puede escribir en la forma $f(x) = a(x \quad h)^2 + k$, donde (h, k) corresponden a las coordenadas del vértice y $a \neq 0$.

La gráfica de una función cuadrática recibe el nombre de **parábola**.

El vértice de la parábola cuya ecuación es $y = ax^2 + bx + c$ se encuentra ubicado en el punto $V = \left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$ y el sentido hacia donde abre la parábola está determinado por el signo de a, esto es: si $a > 0$ la parábola abre hacia arriba y si $a < 0$ la parábola abre hacia abajo.

Si f es una función cuadrática, Dom $f = \mathbb{R}$ y su rango está determinado así:

- Si $a > 0$, Ran $f = \left[f\left(-\frac{b}{2a}\right), +\infty\right)$.
- Si $a < 0$ Ran $f = \left(-\infty, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right]$.



Ejemplo

Encontrar el vértice, el dominio y el rango de la función $f(x) = 3x^2 + 6x \quad 1$. Trazar la gráfica correspondiente.

Primero, se remplazan $a = 3$ y $b = 6$, para hallar la coordenada en x del vértice.

$$-\frac{b}{2a} = -\frac{6}{2(3)} = \quad 1$$

Segundo, se halla la imagen de -1.

$$\begin{aligned} f(\quad 1) &= 3(\quad 1)^2 + 6(\quad 1) \quad 1 \\ &= 3(1) \quad 6 \quad 1 \\ &= -4 \end{aligned}$$

Luego, el vértice queda ubicado en $V = (\quad 1, -4)$.

Puesto que $3 > 0$ la parábola abre hacia arriba.

Finalmente, se hallan las raíces de $f(x) = 3x^2 + 6x - 1$, las cuales se determinan resolviendo la ecuación cuadrática $3x^2 + 6x - 1 = 0$, por medio de la fórmula cuadrática.

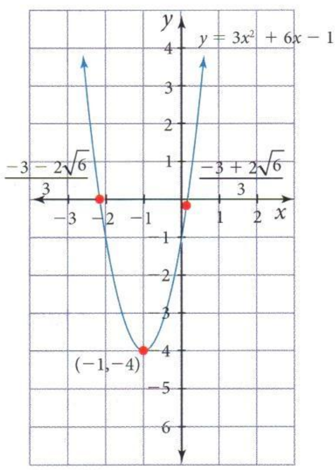
$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - \;4ac}}{2a}$$

Como $a = 3$, $b = 6$ y $c = \quad 1$, entonces,

$$x = \frac{-6 + \sqrt{(6)^2 - 4(3)(\quad 1)}}{2 \cdot 3}$$

$$x = \frac{-6 + \sqrt{48}}{6} = \frac{-3 \pm 2\sqrt{3}}{3}$$

La gráfica de la función es:



Una función f es **función racional** si $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ donde P(x) y Q(x) son polinomios y $Q(x) \neq 0$.

El dominio de *f* está dado por todos los números reales excepto los ceros del polinomio que está en el denominador.

Por ejemplo, las funciones $f(x) = \frac{1}{x - 2}$ y $h(x) = \frac{x^2 + 9}{x^3 - 8}$ son funciones racionales y sus dominios son Dom $f = \mathbb{R} - \{2\}$ y Dom $h = \mathbb{R} - \{2\}$ respectivamente. El rango de una función racional se puede determinar al trazar su gráfica.

Gráfica de una función racional

Para trazar la gráfica de una función racional se deben seguir los siguientes pasos.

- Primero, se determinan las raíces o ceros del numerador y del denominador, es decir, los valores de x para los cuales la función $f(x) = 0$ y $f(x)$ no está definida.
- Segundo, se hallan las **asíntotas verticales** si existen. Teniendo en cuenta que: si a es un cero del denominador, entonces la gráfica de la función tiene una asíntota vertical en $x = a$, siempre y cuando el numerador y el denominador de la función racional no tengan un factor común.

  La recta $x = a$ es una asíntota vertical de la gráfica de una función racional f, si $f(x)$ crece o decrece indefinidamente cuando los valores de x se acercan a a por la izquierda o por la derecha.
- Tercero, se halla el intercepto con el eje y, es decir se halla $f(0)$.
- Cuarto, se halla la **asíntota horizontal** si existe.

  En una función racional f definida por·

$$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0} = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

  Se puede afirmar que:

  Si $n < m$, entonces, la función f tiene una asíntota horizontal en la recta $y = 0$ (eje x).

  Si $n = m$, entonces, la función f tiene una asíntota horizontal en la recta $y = \frac{a_n}{b_m}$

  Si $n > m$, entonces, la función f no tiene asíntota horizontal.

  La recta $y = c$ es una asíntota horizontal de la gráfica de la función racional f, si $f(x)$ se acerca a c cuando los valores de x crecen o decrecen.
- Quinto, se hace una tabla de valores para obtener los puntos suficientes y garantizar un buen bosquejo de la gráfica.
- Sexto, se dibujan las asíntotas, se ubican los puntos de la tabla de valores y finalmente se unen utilizando líneas curvas.

Ejemplos

Trazar la gráfica de cada función.

a. $h(x) = \dfrac{x^2}{x^2 \quad 4}$

Primero, se busca donde $h(x) = 0$ y $h(x)$ no está definida.

$h(x) = \dfrac{x^2}{(x \quad 2)(x+2)}$, luego, $h(x) = 0$ en $x = 0$ y $h(x)$ no está definida en $x = \quad 2$ y $x = 2$.

Segundo, se determinan las asíntotas. Las asíntotas verticales son las rectas $x = 2$ y $x = \quad 2$.

Tercero, se calcula $f(0)$ para hallar el intercepto con el eje y.

$$h(0) = \frac{0^2}{0^2 \quad 4} = 0\ ,\ h(0) = 0$$

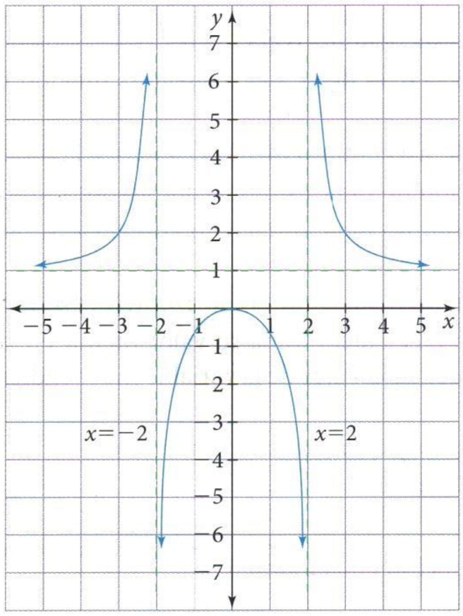
Cuarto, ya que el grado del polinomio del numerador es 2 y del denominador es 2, entonces, la función tiene una asíntota horizontal en la división de los coeficientes de los términos que tienen el exponente 2.

$$y = \frac{1}{1} = 1,\ y = 1$$

Quinto, se realiza una tabla de valores con números a lado y lado de las asíntotas verticales.

x	3	−2,5	−1,5	−1	1	1,5	2,5	3
y	1,8	2,78	1,28	−0,33	−0,33	−1,28	2,78	1,8

Luego, la gráfica de la función se puede observar a continuación.



b. $f(x) = \dfrac{3x^2 - 3}{x^2 + 4}$.

Primero, se determina $f(x) = 0$ y donde $f(x)$ no está definida.

$\dfrac{3x^2 \quad 3}{x^2 + 4} = 0$ cuando $x = 1$ y $x = \quad 1$

La gráfica está definida para todo $\mathbb{R}$.

Segundo, se determinan las asíntotas, entonces, no tiene asíntotas verticales ya que en $x^2 + 4 = 0$ no se presenta para ningún número en $\mathbb{R}$.

Tercero, se calcula $f(0)$ así:

$$f(0) = \frac{3(0)^2 - 3}{0^2 + 4} = -\frac{3}{4}$$

Entonces, $-\dfrac{3}{4}$ es el y intercepto.

Cuarto, se halla la asíntota horizontal.

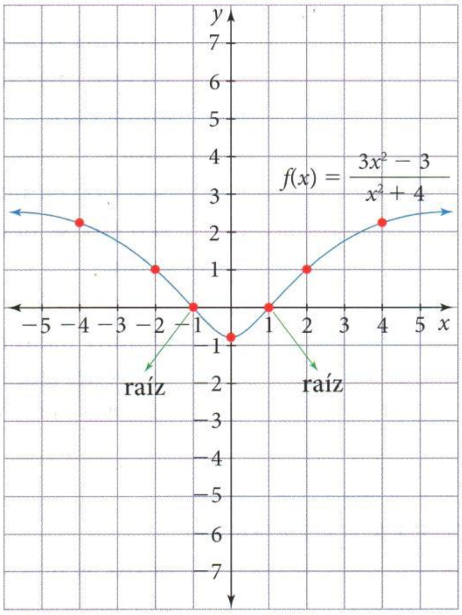
$$y = \frac{3}{1} = 3$$

Luego, $y = 3$ es la asíntota horizontal.

Quinto, para dar más precisión a la gráfica se elabora la tabla de valores.

x	−4	−3	−2	2	3	4
y	$\frac{9}{4}$	$\frac{24}{13}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{24}{13}$	$\frac{9}{4}$

Luego, como f es una función par su gráfica es simétrica respecto al eje y.



FUNCIONES RADICALES:

RECUERDA QUE…

En la radicación se tienen los siguientes elementos:

Índice

$\sqrt[n]{a} = b$

Radicando Raíz n-ésima

Una **función radical** es una función que contiene raíces de variables.

Las funciones, $f(x) = \sqrt[3]{x-3}$, $h(x) = 4 + \sqrt{x^2+5}$, $k(x) = \dfrac{x \quad 1}{\sqrt{x-2}}$ y $f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x+2}{x-3}}$ son funciones radicales, la función $f(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}x$ no es radical.

Para hallar el dominio de una función radical se debe observar el índice de la raíz.

- Si el índice de la raíz es par se deben eliminar del dominio todos los valores de x que hacen que el radicando sea negativo, o los que generen restricciones en el mismo.
- Si el índice es impar, la función está definida para todos los reales, excepto los valores de x que generen restricciones en el radicando.

Gráfica de una función radical

Para realizar el bosquejo de la gráfica de una función radical se realizan los siguientes pasos, así:

- Primero, se busca donde $f(x) = 0$ o donde $f(x)$ no está definida.
- Segundo, se determina si tiene asíntotas verticales, en el caso que también sea racional.
- Tercero, se averigua el intercepto con el eje y.
- Cuarto, se hallan las asíntotas horizontales, en caso de que también sea racional.
- Quinto, se realiza una tabla de valores para conocer más puntos de la gráfica.
- Sexto, se traza la gráfica.

Ejemplos

Trazar la gráfica de las siguientes funciones. Determinar su dominio y rango.

a. $g(x) = \sqrt{x \quad 3}$

Primero, se verifica donde $g(x)$ no está definida o $g(x) = 0$.

En este caso, se necesita que $x \quad 3 \geqslant 0$, es decir $x \geqslant 3$, luego la función no está definida para $x < 3$.

Para $g(x) = 0$, se tiene $\sqrt{x \quad 3} = 0$, así el punto $(3, 0)$ pertenece a la función.

Segundo, se determina que la función no tiene asíntotas puesto que es radical.

Tercero, se determina que la función no tiene intercepto con el eje y, pues $g(0)$ no existe.

Cuarto, se determina que la función no tiene asíntotas horizontales porque es radical.

Quinto, dado que f es una función creciente, f toma su valor menor en $x = 3$ y sus imágenes aumentan en valor al aumentar el valor de la variable independiente x como se observa en la tabla.

x	3	4	5	6	7	8
y	0	1	1,41	1,73	2	2,23

Sexto, se muestra la gráfica de la función en la figura 5.

El Dom $g = [3, \infty)$ y Ran $g = [0, \infty)$.

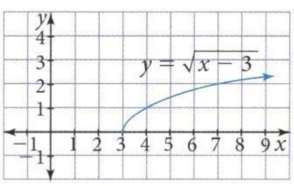


Figura 5

b. $f(x) = \sqrt[3]{x}$

Primero, dado que el índice de la raíz es impar y el radicando no posee restricciones adicionales, entonces, la función no tiene restricciones. Además $\sqrt[3]{x} = 0$ cuando $x = 0$.

Segundo, se encuentra que la función no tiene asíntotas verticales.

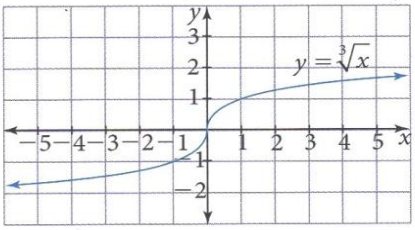
Tercero, puesto que $f(0) = 0$ se observa que la función corta al eje y en el punto $(0, 0)$.

Cuarto, se encuentra que la función no tiene asíntotas horizontales.

Quinto, la tabla de valores correspondientes es:

x	−2	−1	0	1	2
y	−2,25	−1	0	1	−1,25

Sexto, la gráfica de la función es:



Dom $f = \mathbb{R}$ y al despejar x se obtiene la expresión $x = y^3$, correspondiente a un polinomio de grado tres en la variable y, por tanto, Ran $f = \mathbb{R}$.

c. $g(x) = \sqrt{\dfrac{2x + 4}{x \quad 1}}$

El índice es par, por tanto, la cantidad subradical debe ser positiva, y además el radicando corresponde a una función racional, por lo que el denominador debe ser diferente de cero, es decir, $x \neq 1$ y $\dfrac{2x + 4}{x \quad 1} \geqslant 0$

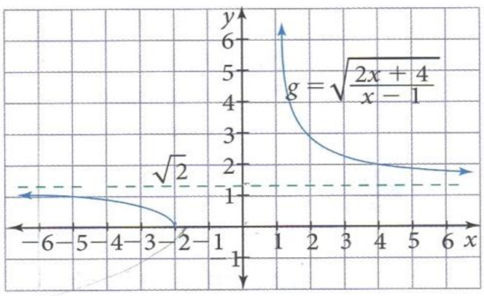
Al resolver la desigualdad se obtiene que $x \geqslant \quad 2$ y $x \neq 1$, pero como x debe ser diferente de 1 puesto que anula el denominador, entonces,

$$\text{Dom } g = (-\infty, -2] \cup (1, +\infty).$$

La tabla de valores muestra lo que ocurre con las imágenes de la función.

x	−5	−3	2	,05	1,2	1,5	2	4	5
y		0,7	0	11,04	5,65	3,74	2,82	2	1,87

La gráfica de la función es:



Al observar la gráfica se concluye que:

$$\text{Ran } g = [0, \sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty).$$